

## Correction Devoir surveillé n°1

**Exercice 1 (Calculs de puissances)**

1. On calcule

(a)

$$\begin{aligned}
 A &= x^4 \times (3x)^{-2} \\
 &= x^4 \times 3^{-2} \times x^{-2} \\
 &= \frac{1}{9}x^2
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{x^3 \times x^{-5}}{x^4} \\
 &= \frac{x^{-2}}{x^4} \\
 &= x^{-6}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 C &= (4x)^2 \times (x^3)^3 \\
 &= 16x^2 \times x^9 \\
 &= 16x^{11}
 \end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}
 D &= 2^n + 2^n + 2^n + 2^n \\
 &= 2^n(1 + 1 + 1 + 1) \\
 &= 4 \times 2^n \\
 &= 2^{n+2}
 \end{aligned}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{x^{n+1}}{x^n(-x)^{-2n}} \\
 &= x^{n+1-n} \times (-x)^{2n} \\
 &= x \times (-1)^{2n}x^{2n} \\
 &= x^{2n+1}
 \end{aligned}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned}
 F &= \sqrt{x} \times \frac{x^2}{(-\sqrt{x})^4 x^{-5}} \\
 &= x^{1/2} \times \frac{x^{2+5}}{(-1)^4 (\sqrt{x})^4} \\
 &= x^{1/2} \times \frac{x^7}{x^2} \\
 &= x^{1/2} \times x^5 \\
 &= x^{11/2}
 \end{aligned}$$

**Exercice 2 (Logarithme et exponentielle)**

1. On calcule

$$\begin{aligned}
 A &= 3 \ln(8) - 5 \ln(18) + 10 \ln(12) \\
 &= 3 \ln(2^3) - 5 \ln(2 \times 3^2) + 10 \ln(2^2 \times 3) \\
 &= 9 \ln(2) - 5 \ln(2) - 10 \ln(3) + 20 \ln(2) + 10 \ln(3) \\
 &= 24 \ln(2)
 \end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}
 B &= 2 \ln(x^4) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
 &= 2 \times 4 \ln(x) - \ln(x^3) \\
 &= 8 \ln(x) - 3 \ln(x) \\
 &= 5 \ln(x)
 \end{aligned}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}
 C &= 5 \ln\left(\frac{9}{15}\right) - 4 \ln\left(\frac{3}{25}\right) + 8 \ln\left(\frac{5}{9}\right) \\
 &= 5(\ln(3^2) - \ln(3 \times 5)) - 4(\ln(3) - \ln(5^2)) + 8(\ln(5) - \ln(3^2)) \\
 &= 10 \ln(3) - 5 \ln(3) - 5 \ln(5) - 4 \ln(3) + 8 \ln(5) + 8 \ln(5) - 16 \ln(3) \\
 &= -15 \ln(3) + 11 \ln(5)
 \end{aligned}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned}
 D &= \ln\left(\frac{\sqrt{7}+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{7}-2}{2}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}{4}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{7-4}{4}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{3}{4}\right)
 \end{aligned}$$

5. Par définition,

$$E = \exp(3 \ln(2)) = 2^3 = 8.$$

6. On calcule,

$$\begin{aligned}
 F &= \ln(e^{x^3+2x}) - e^{3 \ln(x)} + \ln(1) \\
 &= x^3 + 2x - x^3 + 0 \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

### Exercice 3 (Démonstration par récurrence)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ . On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq 0\}$ .

- **Initialisation** : On a bien  $u_0 = 1 \geq 0$  donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$$

Or  $u_n^2 \geq 0$  et  $u_n \geq 0$  (Hypothèse de récurrence) donc  $u_{n+1} \geq 0$ . Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion :**  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.}$

2. On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{e^n \geq n + 1\}$ .

- **Initialisation :** On a bien  $e^0 = 1$  et  $0 + 1 = 1$  donc  $e^0 \geq 0 + 1$  et l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} e^n &\geq n + 1 \\ \implies e^{n+1} &\geq e(n + 1) \\ \implies e^{n+1} &\geq en + e \\ \implies e^{n+1} &\geq n + 2 \end{aligned}$$

En effet,  $en \geq n$  et  $e \geq 2$ . Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion :**  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, e^n \geq n + 1.}$

#### Exercice 4 (Étude de fonctions)

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0, +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(1 + x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x}{x + 2}$$

On note  $h$  la fonction définie sur ce même intervalle par  $h(x) = f(x) - g(x)$

1. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty$  donc par composition,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x) = +\infty.}$$

On calcule pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,

$$g(x) = \frac{2x}{x + 2} = \frac{2x}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2.}$$

2. Tout d'abord notons que :

— la quantité  $\ln(1 + x)$  est définie lorsque  $x + 1 > 0$  i.e.  $x > -1$ , la quantité  $\frac{1}{x+2}$  est définie lorsque  $x \neq -2$

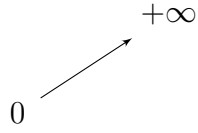
$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } h \text{ est définie sur } \mathcal{D}_h = ] - 1, +\infty[}$$

L'énoncé restreint l'intervalle de définition de  $f$  et  $g$  à  $[0, +\infty[$  Par la suite, on se limitera donc à cet intervalle. La fonction  $h$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  car  $f$  et  $g$  sont dérivables sur cet intervalle. De

plus, pour  $x \in [0, +\infty[$ , on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2)^2}{(1+x)(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 4 - 4x - 4}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \end{aligned}$$

Comme  $\frac{x^2}{(x+2)^2} \geq 0$ ,  $h'(x)$  est du signe de  $x+1$  On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	0	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de $h$		

Ainsi pour tout  $x \geq 0$   $h(x) \geq 0$  c'est à dire

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \geq g(x).}$$

3. Au point d'abscisse 0, la courbe représentative de  $f$  admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{1}{1+0}x + \ln(1+0) = x$$

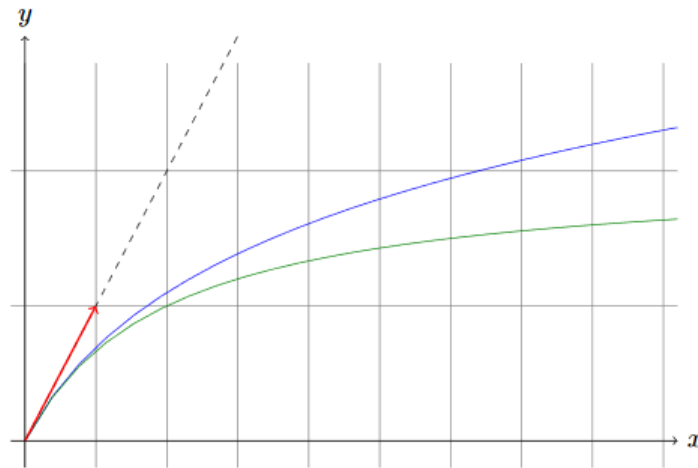
Au point d'abscisse 0, la courbe représentative de  $g$  admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0) = \frac{4}{(0+2)^4}x + \frac{0}{0+2} = x$$

Au point d'abscisse 0,

$$\boxed{\text{les courbes représentatives de } f \text{ et } g \text{ admettent pour tangente la droite d'équation } y = 0}$$

4. On trace



5. On définit désormais, pour tout réel  $\alpha$  strictement positif, la fonction  $f_\alpha$  par

$$f_\alpha(x) = \ln(1+x) - \alpha x$$

Par le même argument que précédemment,  $f_1$  est définie sur  $\mathcal{D}_{f_1} = ]-1, +\infty[$ . Par la suite, on se limite à l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ . De plus, pour  $x \in [0, +\infty[$ , on a :

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \frac{x-x-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

Comme  $x \geq 0$  et  $1+x \geq 0$ ,  $f_1'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

On en déduit le tableau de variations suivant.

$x$	0	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	0	-
Variations de $f_1$	0	$\searrow$ $FI$

Ainsi, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f_1(x) \leq 0$

6. Soit  $x \geq 0$ . D'après la question précédente, on a :  $f_1(x) = \ln(1+x) - x \leq 0$ . Ainsi,  $\ln(1+x) \leq x$ . On en déduit que si  $\alpha \geq 1$ , on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \ln(1+x) \leq x \leq \alpha x$$

7. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Étudions la fonction  $f_\alpha$ . Par le même argument que précédemment,  $f_\alpha$  est définie sur  $\mathcal{D}_{f_\alpha} = ]-1, +\infty[$ . Par la suite, on se limite à l'intervalle  $[0, +\infty[$ . La fonction  $f_\alpha$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ . De plus, pour  $x \in [0, +\infty[$ , on a :

$$f_\alpha'(x) = \frac{1}{1+x} - \alpha = \frac{1}{1+x} - \alpha \frac{1+x}{1+x} = \frac{1-\alpha-x}{1+x}$$

Comme  $1 + x \geq 0$ ,  $f'_\alpha(x)$  est du signe de  $1 - \alpha - \alpha x$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ . De plus, on a :

$$1 - \alpha - \alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha x = 1 - \alpha \Leftrightarrow x = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

Il convient enfin de remarquer que :  $\frac{1-\alpha}{\alpha} > 0$  puisque  $1 - \alpha > 0$  (car  $\alpha < 1$ ) et  $\alpha > 0$ . On en déduit le tableau de variations suivant.

$x$	0	$\frac{1-\alpha}{\alpha}$	$+\infty$
Signe de $f'_\alpha(x)$	+	0	-
Variations de $f_\alpha$	0	$f\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$	FI

D'après ce tableau de variations,  $f_\alpha(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \frac{1-\alpha}{\alpha}$ . Ce qui revient à dire que :  $f(x) > \alpha x$ . On en déduit

il n'existe pas d'élément  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que :  $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq \alpha x$ .

### Exercice 5

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ et } g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

1. La quantité  $\frac{1}{x+1}$  est définie si :  $x+1 \neq 0$  i.e. si  $x \neq -1$

Ainsi,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$

La quantité  $\frac{1}{x-2}$  est définie si :  $x-2 \neq 0$  i.e. si  $x \neq 2$

Ainsi,  $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\} = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$

2. On note  $a = \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$

(a) Commençons par calculer :

$$a+1 = \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} + 1 = \frac{-2\sqrt{2}-x+x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$a-2 = \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} - 2 = \frac{-2\sqrt{2}-1-2+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-3}{1-\sqrt{2}}$$

Ainsi, on a :  $\frac{1}{a-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-3}$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} g(a) &= -\frac{a+1}{a-2} \\ &= -(a+1) \frac{1}{a-2} \\ &= -\frac{7\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \frac{1-\sqrt{2}}{7} \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= \frac{2g(a) - 1}{g(a) + 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-\sqrt{2} + 1} \\ &= a \end{aligned}$$

(c) On simplifie l'expression de  $a$ .

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2\sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{(-2\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} - 4 - 1 - \sqrt{2}}{1 - 2} \\ &= \frac{-5 - 3\sqrt{2}}{-1} \\ &= 5 + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(d) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . On a :

$$f(g(x)) = \frac{2g(x) - 1}{g(x) + 1}.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} 2g(x) - 1 &= -2\frac{x+1}{x-2} - 1 \\ &= \frac{-2x - 2 - (x - 2)}{x - 2} \\ &= \frac{-2x - 2 - x + 2}{x - 2} \\ &= \frac{-3x}{x - 2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(x) + 1 &= -\frac{x+1}{x-2} + 1 \\ &= \frac{-x - 1 + (x - 2)}{x - 2} \\ &= \frac{-x - 1 + x - 2}{x - 2} \\ &= \frac{-3}{x - 2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\frac{1}{g(x)+1} = \frac{x-2}{-3}$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} \\ &= (2g(x)-1) \frac{1}{g(x)+1} \\ &= \frac{-3x}{x-2} \frac{x-2}{-3} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f(g(x)) = x}$$

3. Vérification Scilab dans la console :

(a) Écrire la ligne de code permettant d'entrer la valeur de  $a$  que l'on placera dans une variable  $a$ .

$$\mathbf{a} = (-2 * \text{sqrt}(2) - 1) / (1 - \text{sqrt}(2))$$

(b) Écrire la ligne de code permettant de calculer  $g(a)$  et de l'enregistrer dans une variable  $b$ . (en utilisant la définition de  $g$ ).

$$\mathbf{b} = - (a + 1) / (a - 2)$$

(c) Écrire la ligne de code permettant de calculer  $f(g(a))$ .

$$\mathbf{c} = (2*b - 1) / (b+1)$$

4. On écrit le script scilab :

```
x = input("Entrez un nombre x:")
if x >= 0 then
    y = (2*x - 1)/(x+1)
    disp(y)
else
    y = - (x + 1)/(x-2)
    disp(y)
```

### Exercice 6 (Étude d'une suite)

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. (a) On calcule

$$- u_1 = 2u_0 + 0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$- u_2 = 2u_1 + 1 - 1 = 2$$

$$- u_3 = 2u_2 + 2 - 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\boxed{u_1 = 1, u_2 = 2 \text{ et } u_3 = 5}$$

(b) On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \geq 1\}$ .

- **Initialisation** : On a  $u_0 = 1 \geq 1$  donc l'initialisation est vérifiée ( $\mathcal{P}_0$  est vraie).

- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} & u_n \geq 1 \\ \implies & 2u_n \geq 2 \\ \implies & 2u_n + n - 1 \geq 2 + n - 1 \\ \implies & u_{n+1} \geq 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $n - 1 \in \mathbb{N}$ . Par définition de la suite  $(u_n)$ , on a :

$$u_{(n-1)+1} = 2u_{n-1} + (n - 1) - 1 = 2u_{n-1} + n - 2 \geq 2 + n - 2 = n$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $u_n \geq n$

(d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n + n - 1 - u_n = u_n + n - 1$$

D'après la question 1.b

$$u_{n+1} - u_n \geq 1 + n - 1 = n$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq n \geq 0$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

2. Dans cette question, on pose pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = n + u_n$

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n + 1) + u_{n+1} \\ &= n + 1 + 2u_n + n - 1 \\ &= 2u_n + 2n \end{aligned}$$

Ainsi  $v_{n+1} = 2(u_n + n)$ .

(b) D'après la question précédente,  $v_{n+1} = 2(u_n + n) = 2v_n$ . La suite  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $v_0 = u_0 + 0 = 1$ . Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n.$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on sait que  $v_n = u_n + n \iff u_n = v_n - n$ . En utilisant la question précédente, on a immédiatement que

$$u_n = 2^n - n.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition de la suite  $(u_n)$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} &= \frac{(2u_n + n - 1) - 1}{2^n} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{2^n} + \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

### Exercice 7

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation

$$a^b = b^a$$

où  $a$  et  $b$  sont des entiers strictement positifs tels que  $a < b$

1. Soient  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ . On a alors :

$$\begin{aligned} a^b &= b^a \\ \iff e^{b \ln(a)} &= e^{a \ln(b)} \quad (\text{par définition}) \\ \iff b \ln(a) &= a \ln(b) \quad (\text{par application de } \ln) \\ \iff \frac{\ln(a)}{a} &= \frac{\ln(b)}{b} \\ \iff f(a) &= f(b) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a^b = b^a \iff f(a) = f(b)}$$

2. La quantité  $f(x)$  est définie :

- si la quantité  $\ln(x)$  est définie *i.e.* si  $x \in ]0, +\infty[$
- et si la quantité  $\frac{1}{x}$  est définie *i.e.* si  $x \neq 0$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est définie sur } \mathcal{D}_f = ]0, +\infty[}$$

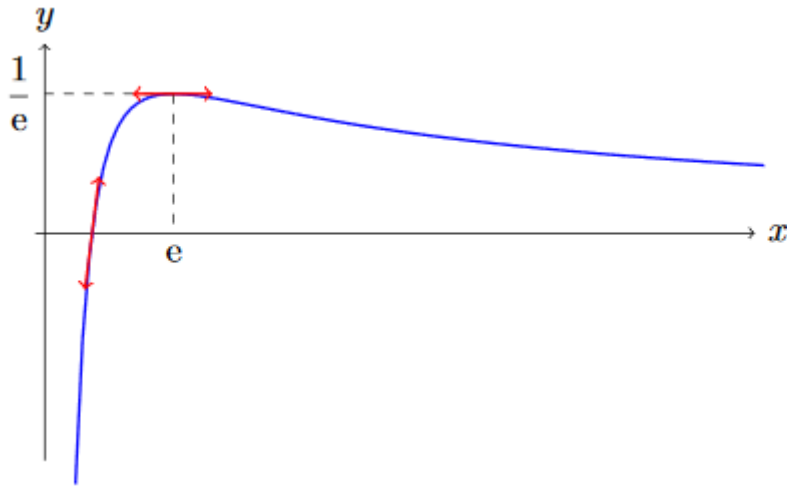
La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  car elle le produit des fonctions  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  dérivables sur  $]0, +\infty[$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in ]0, +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}}$$

comme  $x^2 > 0$  sur  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \ln(x)$  On en déduit le tableau de variations suivant.

$x$	0	$e$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de $f$			$\frac{1}{e}$	0

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ atteint son maximum } \frac{1}{e} \text{ en } x = e.}$$



Au point d'abscisse 1, la fonction  $f$  admet pour tangente la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

On en déduit la représentation graphique suivante.

3. On souhaite trouver les couples  $(a, b) \in \mathbb{N}^*$  tels que  $f(a) = f(b)$  et  $a \leq b$ . On cherche donc tous les couples d'entiers différents possédant la même image par  $f$ . Or d'après l'étude précédente :
- si  $y > \frac{1}{e}$ ,  $y$  n'admet pas d'antécédent par  $f$
  - si  $y = \frac{1}{e}$ ,  $y$  admet un unique antécédent par  $f$  ( il s'agit de  $e$  )
  - si  $0 < y < \frac{1}{e}$ ,  $y$  admet deux antécédents par  $f$  Le plus petit est situé dans l'intervalle  $]1, e[$  et le plus grand est dans l'intervalle  $]e, +\infty[$
  - si  $y \leq 0$ ,  $y$  admet un unique antécédent par  $f$

On en déduit que  $a$  peut prendre toute valeur entière de l'intervalle  $]1, e[$  Comme  $e \simeq 2,71$ ,

la seule valeur possible est  $a = 2$

4. Pour tout  $b \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $1^b = 1$  et  $b^1 = 1$ . Ainsi :  $1^b = b^1 \Leftrightarrow b = 1$

L'équation  $1^b = b^1$  admet comme unique solution  $b = 1$

5. Ici, on a fixé  $a = 2$  et on cherche les solutions entières  $b \neq 2$  à l'équation :  $f(2) = f(b)$  D'après l'étude précédente, si  $b$  existe, il est unique et situé dans l'intervalle  $]e, +\infty[$

- Si  $b = 3$ , on a :  $2^b = 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2 = b^2$
- Si  $b = 4$ , on a :  $2^b = 2^4 = 16 = 16 = 4^2 = b^2$

L'équation  $2^b = b^2$  admet comme unique solution  $b = 4$

6. D'après ce qui précède,

l'équation  $a^b = b^a$  admet comme unique couple entier solution (avec  $a < b$ ) le couple  $(2, 4)$ .